Chapitre : Calculs de primitives et techniques élémentaires de calcul intégral

1 Reconnaissance de formes

Exercice 1 **Primitives usuelles** –

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

$$f_1(x) = 5x^3 - 3x + 7 \qquad f_2(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x) \qquad f_3(x) = 10 - 3e^x + x$$
$$f_4(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad f_5(x) = \frac{x+5}{x^2} \qquad f_6(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$$

Indication ▼ Correction ▼ [3125]

Exercice 2 **Primitives usuelles –**

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle bien choisi :

$$f_1(x) = e^{4x} \qquad f_2(x) = e^{4x+3} \qquad f_3(x) = \sin(2x)$$
$$f_4(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) \qquad f_5(x) = (2x+1)^2 \qquad f_6(x) = \frac{3}{\sqrt{5x+1}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3126]

Exercice 3 **Reconnaissance de formes** –

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2} \qquad g(x)=\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \qquad h(x)=\frac{\ln x}{x}$$
$$k(x)=\cos(x)\sin^2(x) \qquad l(x)=\frac{1}{x\ln x} \qquad m(x)=3x\sqrt{1+x^2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [2600]

Exercice 4 **Reconnaissance de formes** –

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3$, $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}$, $I =]-\infty, 0[$

Indication ▼ Correction ▼ [431]

Exercice 5 **Reconnaissance de forme** –

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Indication ▼ Correction ▼ [2988]

2 Intégration par parties

Exercice 6 **Intégration par parties - Niveau 1 –**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\quad I = \int_0^1 xe^x dx \qquad \textbf{2.}\quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Indication ▼ Correction ▼ [397]

Exercice 7 **Intégration par parties - Niveau 2** –

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \arctan(x)$ **2.** $x \mapsto (\ln x)^2$ **3.** $x \mapsto \sin(\ln x)$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 8 **Intégration par parties - Niveau 3 –**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ **2.** $J = \displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$ **3.** $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 9 **Primitive d'une puissance du logarithme** –

Pour $n \geq 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

Indication ▼ Correction ▼ [402]

Exercice 10 **Une suite d'intégrales –**

Soient $(\alpha,\beta,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}$. Calculer

$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n dt.$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 11 **Une suite d'intégrales –**

Pour (n,p) éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 12 **Intégration par parties itérée –**

Soit $n \geq 1$.

1. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n. Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)} g = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(f^{(n-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a) g^{(k)}(a) \right) + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}.$$

2. Application : On pose $Q_n(x) = (1-x^2)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Justifier que P_n est un polynôme de degré n, puis prouver que $\int_{-1}^1 Q P_n = 0$ pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Indication ▼ Correction ▼ [403]

3 Changements de variables

Exercice 13 **Changements de variables - Niveau 1 –**

En effectuant le changement de variables demandé, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ en posant $x=\sqrt{t}$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ en posant $x=\cos t$;
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t}$ en posant $x=\ln t$.

Indication ▼ Correction ▼ [393]

Exercice 14 **Changements de variables - Niveau 2** –

En effectuant le changement de variables indiqué, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ en posant $x = e^t$;
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}dt$ en posant $x = \sqrt{t}$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $t = \sin\theta$.

Indication ▼ Correction ▼ [394]

Exercice 15 **Double changement de variables –**

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}}du$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3156]

Exercice 16 **Fonction avec un axe de symétrie –**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(a+b-x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Indication ▼ Correction ▼ [392]

Exercice 17 **Changement de variables - Recherche de primitives - Niveau 1** –

En effectuant le changement de variables indiqué, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, en posant $u = \sqrt{1+x}$;
2. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$, en posant $u = e^x$;
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$, en posant $u = \ln x$.

Indication ▼ Correction ▼ [3154]

Exercice 18 **Changements de variables - Recherche de primitives - Niveau 2** –

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos(2\ln x)$;
2. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$;
3. $x \mapsto \dfrac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [395]

4 Fractions rationnelles

Exercice 19 **Intégrale d'une fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples** –

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

Indication ▼ Correction ▼ [2601]

Exercice 20 **Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples –**

Soit $f(x)=\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x\in]1,+\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x\in]1,+\infty[,\ f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 21 **Primitive de fractions rationnelles –**

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$ **2.** $f(x)=\frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1,+\infty[$

3. $f(x)=\frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2,+\infty[$ **4.** $f(x)=\frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2,1/3[$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 22 **Primitive de fractions rationnelles** –

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 23 ★★ –

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}$ **2.** $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$

3. $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$

Indication ▼ Correction ▼

5 Avec la fonction exponentielle

Exercice 24 **Exponentielle * Polynôme** –

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1}.\ \int_0^2 (x+6)e^{2x}dx \qquad \textbf{2}.\ \int_0^1 e^x(2x^3+3x^2-x+1)dx$$

Indication ▼ Correction ▼ [3152]

Exercice 25 **Exponentielle * trigonométrique** –

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1}.\int_0^{\pi} e^x \sin(2x)dx \qquad \textbf{2}.\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2 x dx$$

Indication ▼ Correction ▼ [3153]

Exercice 26 **Exponentielle * polynôme * trigonométrique –**

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx.$$

Indication ▼ Correction ▼

6 Intégrales trigonométriques

Exercice 27 **Puissances et produits** –

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\textbf{1}.\ x \mapsto \sin^5 x \qquad \textbf{2}.\ x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x \qquad \textbf{3}.\ x \mapsto \cos(3x)\cos^3 x.$$

Indication ▼ Correction ▼ [439]

Exercice 28 **Juste des cosinus** –

1. Démontrer par récurrence que si $m,n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m > n$, on a

$$\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(mx)dx = 0$$

- on pourra utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big).$$

2. En déduire que

$$\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(nx)dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [2513]

Exercice 29 **Quotient** –

Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{\cos^6 x}$ sur l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$.

Indication ▼ Correction ▼ [2375]

Exercice 30 **Intégrale trigonométrique - 1 –**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t}dt$ **2.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$ **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \big(1+\cos(x)\big)\tan(x)dx.$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 31 ★★★ **Intégrale trigonométrique - 2 –**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1}.\ \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x}\,dx \qquad \textbf{2}.\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}.$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 32 ★★★★ **Intégrale trigonométrique - 3 –**

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1.}\ \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}dx \qquad \textbf{2.}\ \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}.$$

Indication ▼ Correction ▼

Indication pour l'exercice 1 ▲

Reconnaitre des primitives usuelles, éventuellement en effectuant des combinaisons linéaires....

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

Reconnaitre des fonctions de la forme $u' \times u$, u'/u, $u' \times u^2$,...

Indication pour l'exercice 4 ▲

Reconnaitre une forme usuelle (du type $u^n u'$,....)

Indication pour l'exercice 5 ▲

Reconnaitre des dérivées de fonctions composées

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Poser $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.
2. Poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour chacune des 3 fonctions f, on pourra l'écrire sous la forme $1 \times f$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Intégrer par parties, puis réaliser une décomposition en éléments simples.
2. Intégrer par parties (deux fois). Un bon choix d'une primitive peut simplifier les calculs.
3. Intégrer par parties entre $a > 0$ et 1. Faire tendre a vers 0 tout à la fin...

Indication pour l'exercice 9 ▲

Deviner le résultat sur les premiers termes par une intégration par parties, puis prouver le résultat par récurrence.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Faire n intégrations par parties successives.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Par une intégration par parties, établir une formule de récurrence reliant $I_{n,p}$ à $I_{n,p-1}$ (attention à la borne 0 !). Puis trouver la formule générale pour $I_{n,p}$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. Raisonner par récurrence.
2. Appliquer la formule précédente, et remarquer que $Q^{(k)}(1) = Q^{(k)}(-1) = 0$ si $k \leq n-1$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Faire le changement de variables demandé (en suivant la méthode décrite dans la vidéo au début de la correction). Une fois le changement de variable effectué, on doit trouver une intégrale facile à calculer.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Le changement de variables nous amène à calculer $\int_1^e \frac{dx}{x+1}$. Pour cela, on pourra écrire $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
2.

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Effectuer le changement de variables $x = \sqrt{1+u}$.
2. Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{1+t}$.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Faire le changement de variables $u = a+b-x$ dans l'intégrale de gauche. Pour le calcul de l'intégrale, on se ramène à calculer $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$, que l'on traite à l'aide du changement de variables $u = \cos x$.

Indication pour l'exercice 17 ▲

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Poser $u = \ln x$.
2. Poser $u = \sqrt{x}$.
3. Poser $u = \sqrt{e^x - 1}$.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Procéder par identification.
2.

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Mettre tout au même dénominateur, et procéder par identification.
2. Intégrer chaque "élément simple", et ajuster la constante.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Décomposer la fraction rationnelle en "éléments simples" à intégrer.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Reconnaitre une primitive.
2. Écrire le dénominateur sous forme canonique.
3. Factoriser le dénominateur !

Indication pour l'exercice 23 ▲

Pour chacun des 3 exemples, commencer par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Écrire que $e^x \sin(2x) = e^x \Im m(e^{2ix}) = \Im m(e^{(1+2i)x}$ puis utiliser une primitive de $e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
2. Linéariser $\sin^2 x$ puis remplacer $\sin x$ par $\Im m(e^{ix})$ et se ramener à la question précédente.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Remplacer $\cos x$ par e^{ix} puis intégrer par parties.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Linéariser l'expression.

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. La récurrence porte sur n. Écrire proprement l'hypothèse de récurrence !
2. Raisonner aussi par récurrence !

Indication pour l'exercice 29 ▲

Poser $t = \tan x$.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Faire le changement de variables $u = \cos(t)$.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Faire le changement de variables $t = \cos x$.
2. Faire le changement de variables $u = \tan(x/2)$.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1. Commencer par poser $t = x/6$.
2. Poser $u = \cos x$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $x \mapsto \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + C$, $C \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$;
2. $x \mapsto 2\sin(x) + 3\cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$;
3. $x \mapsto 10x - 3e^x + \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$;
4. $x \mapsto 10\sqrt{x} + 4\ln(x) - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, sur $]0, +\infty[$;
5. $x \mapsto \ln(x) - \frac{5}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$ (on a écrit $f_5(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}$), sur $]0, +\infty[$;
6. $x \mapsto \frac{x^3}{15} + \frac{x}{6} + C$, $C \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
2. $x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x+3} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
3. $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
4. $x \mapsto \frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
5. $x \mapsto \frac{1}{6}(2x+1)^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$;
6. La fonction f_6 n'est définie que sur $]-1/5, +\infty[$. Sur cet intervalle, ses primitives sont données par $x \mapsto \frac{6}{5}\sqrt{5x+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On reconnait que $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + x^2 > 0$. Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
2. On reconnait que $g(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^{3x} > 0$. Les primitives de g sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
3. On reconnait que $h(x) = u'(x) \times u(x)$, avec $u(x) = \ln x$. Les primitives de h sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Remarquons que de telles fonctions ne sont définies que sur $]0, +\infty[$.
4. On reconnait que $k(x) = u'(x)(u(x))^2$, avec $u(x) = \sin x$. Les primitives de k sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$.
5. En écrivant $l(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, on reconnait que $l(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$. Les primitives de cette fonction, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(\ln x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
6. On reconnait que $m(x) = \frac{3}{2}u'(x)\sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + x^2$. Les primitives de m sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto (1+x^2)^{3/2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 3$, de sorte que $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x-1)$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x)u(x)^3.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4.$$

2. Posons $u(x) = x^3 - 3x + 2$ de sorte que $u'(x) = 3x^2 - 3 = -3(1-x^2)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{-1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3 - 3x + 2)^2}.$$

3. Posons $u(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$. On a $u'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

On peut remarquer que $x^2 - 2x > 0$ sur $]-\infty, 0[$.

4. On peut commencer par écrire que $\ln(x^2) = 2\ln x$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)},$$

avec $u(x) = \ln x$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x).$$

ATTENTION ! ! ! Je reçois beaucoup de messages me disant que le résultat précédent est faux et qu'une primitive est la fonction

$$G(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln(x^2)).$$

Mais

$$G(x) = \frac{1}{2}\ln(2\ln(x)) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln(\ln x) = F(x) + C$$

où C est une constante. Donc les deux réponses sont valables !

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Une primitive de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$, et une primitive de $x \mapsto \cos(3x)$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(3x))\,\mathrm{d}x &= \left[x - \frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

2. Par reconnaissance de dérivée d'une fonction composée, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}u'(x)\sin(u(x))\mathrm{d}x \quad \text{avec } u(x) = x^2 \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

3. Par reconnaissance de dérivée d'une fonction composée, on a

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\ln(x)}\mathrm{d}x &= \int_1^2 u'(x)u(x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \quad \text{avec } u(x) = \ln(x) \\ &= \int_1^2 \frac{2}{3}\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}\mathrm{d}x \quad \text{avec } \alpha = \frac{3}{2} \\ &= \left[\frac{2}{3}u(x)^{\alpha}\right]_1^2 \\ &= \left[\frac{2}{3}\ln(x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3}(\ln(2))^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & e^x & & v(x) & = & e^x. \end{array}$$

On obtient donc

$$\int_0^1 xe^x dx = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x dx.$$

Comme on sait calculer cette dernière intégrale, on trouve finalement

$$\int_0^1 xe^x dx = e - e + 1 = 1.$$

2. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \ln x & & u'(x) & = & \frac{1}{x} \\ v'(x) & = & x^2 & & v(x) & = & \frac{x^3}{3}. \end{array}$$

On obtient donc

$$\begin{array}{rcl} J & = & \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx \\ & = & \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}(e^3 - 1) \\ & = & \frac{2e^3+1}{9}. \end{array}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \arctan x & & u'(x) & = & \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \int \frac{t}{t^2+1} dt.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g, et donc

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & (\ln x)^2 & & u'(x) & = & 2\frac{\ln x}{x} \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2\int \ln t dt.$$

Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est

$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0,+\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \sin(\ln x) & & u'(x) & = & \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$

On intègre une deuxième fois par parties en posant

$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(x) & = & \cos(\ln x) & & u_1'(x) & = & -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v_1'(x) & = & 1 & & v_1(x) & = & x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$

En mettant tout cela ensemble, on trouve

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

soit

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On commence par intégrer par parties en posant $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln(1+t)$, ce qui donne $u(t) = -\frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$. On obtient donc

$$I = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant une décomposition en éléments simples. Plus précisément, on remarque que

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Ainsi il vient

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3).$$

Finalement, on trouve

$$I = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2).$$

2. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors

$$J = \frac{1}{2}\big[(x^2+1)(\arctan x)^2\big]_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx.$$

On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :

$$\begin{array}{rcl} J & = & \frac{\pi^2}{16} - \big[x\arctan x\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \\ & = & \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\big[\ln(x^2+1)\big]_0^1 \\ & = & \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2. \end{array}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0,1]$ en posant $f(0)=0$, ce qui donne un sens à K. Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a>0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $K(a)=\int_a^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :

$$\begin{array}{rr} u(x)=(\ln x) & v'(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x)=\frac{1}{x} & v(x)=-\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array}$$

ce qui donne

$$K(a)=\left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}\right]_a^1+\frac{1}{2}\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

De plus,

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

de sorte que

$$\int_a^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1=-\frac{1}{2}\ln 2-\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(1+a^2).$$

On obtient donc que

$$K(a)=\frac{\ln a}{2(a^2+1)}-\frac{\ln 2}{4}-\frac{\ln a}{2}+\frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve

$$K(a)=\frac{-a^2\ln(a)}{2(a^2+1)}-\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$

Comme $a^2\ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que

$$K=-\frac{\ln 2}{4}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Notons f_n une telle primitive. Intégrant par parties (en dérivant $\ln^n x$ et en intégrant 1), on trouve

$$f_n=\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n f_{n-1}.$$

On itère alors les intégrations par parties, pour trouver

$$\begin{array}{rcl} f_n & = & x\ln^n x - nx\ln^{n-1}x + n(n-1)f_{n-2} \\ & = & x\ln^n x - nx\ln^{n-1}x + n(n-1)x\ln^{n-2}x - n(n-1)(n-2)f_{n-3} \\ & \vdots & \vdots \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)x\ln^{n-k}x \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}x\ln^{n-k}x. \end{array}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

On pose, pour $(\alpha,\beta,n,m)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}^2$,

$$I_{m,n}=\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m(t-\beta)^n dt.$$

On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, et on trouve

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[(t-\alpha)^m \frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - \frac{m}{n+1}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{m-1}(t-\beta)^{n+1}dt \\ &= -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_\alpha^\beta (t-\beta)^p dt = -\frac{(\alpha-\beta)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1} \frac{m(m-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

En particulier, l'intégrale recherché vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)\dots(2n)} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n (\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0,1]$. De plus, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0 (remarquons l'importance de $n > 0$). Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$. Pour calculer $I_{n,p}$, nous allons réaliser une intégration par parties. On la réalise entre $a > 0$ et 1, pour prendre garde au fait que la fonction logarithme n'est pas définie en 0. On remarque aussi que $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, et donc il suffit de traiter le cas $p > 0$. On pose donc

$$I_{n,p}(a) = \int_a^1 x^n (\ln x)^p dx$$

puis

$$\begin{aligned} u(x) &= (\ln x)^p & v'(x) &= x^n \\ u'(x) &= \tfrac{p(\ln x)^{p-1}}{x} & v(x) &= \tfrac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

On trouve alors,

$$I_{n,p}(a) = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^p\right]_a^1 - \frac{p}{n+1}\int_a^1 x^n (\ln x)^{p-1} dx = \frac{-a^{n+1}(\ln a)^p}{n+1} - \frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0. En utilisant la croissance comparée de la fonction logarithme et des puissances en 0, on trouve :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

On trouve alors

$$I_{n,p} = \frac{(-p)\times(-(p-1))\times\dots\times(-1)}{(n+1)\times(n+1)\times\dots\times(n+1)} I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Procédons par récurrence sur n. La formule est vraie pour $n = 1$ (c'est la formule d'intégration par parties classique). Supposons la vraie au rang $n-1$ et prouvons-la au rang n. Soit $h = f'$, qui est de classe C^{n-1}. La formule au rang $n-1$ appliquée à h et g donne

$$\int_a^b h^{(n-1)} g = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \left(h^{(n-1-k-1)}(b) g^{(k)}(b) - h^{(n-1-k-1)}(a) g^{(k)}(a)\right) + (-1)^{n-1} \int_a^b h g^{(n-1)}$$

soit

$$\int_a^b f^{(n)}g = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\right) + (-1)^{n-1}\int_a^b f'g^{(n-1)}.$$

Il suffit alors d'intégrer par parties le dernier terme,

$$\int_a^b f'g^{(n-1)} = f(b)g^{(n-1)}(b) - f(a)g^{(n-1)}(a) - \int_a^b fg^{(n)}$$

pour obtenir le résultat.

2. Q_n est un polynôme de degré $2n$, donc P_n, sa dérivée n-ième, est un polynôme de degré n. De plus, 1 et -1 sont racines n-ièmes de Q_n, et donc pour tout $k \leq n-1$, on a $Q_n^{(k)}(1) = Q_n^{(k)}(-1) = 0$. Pour Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_nQ &= \int_{-1}^1 Q_n^{(n)}Q \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(Q_n^{(n-k-1)}(1)Q^{(k)}(1) - Q_n^{(n-k-1)}(-1)Q^{(k)}(1)\right) + (-1)^n\int_{-1}^1 Q_nQ^{(n)}.\end{aligned}$$

Mais $Q^{(n)} \equiv 0$ car Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$, et pour $k \leq n-1$, $n-k-1 \leq n-1$ et donc $Q_n^{(n-k-1)}(1) = Q_n^{(n-k-1)}(-1) = 0$. On en déduit bien que l'intégrale recherchée est nulle.

Correction de l'exercice 13 ▲

Avant de commencer, on pourra consulter la vidéo suivante, qui présente comment calculer une intégrale en effectuant un changement de variables.

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une fonction de classe C^1 définie sur $[1,4]$ et à valeurs dans $[1,2]$. Posons $x = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $x = 1$ et lorsque $t = 4$, $x = 2$. Lorsqu'on dérive l'égalité $x = \sqrt{t}$, alors on obtient $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. On a donc

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt = 2(1-\sqrt{t})\frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2(1-x)dx.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt &= \int_1^2 2(1-x)dx \\ &= \left[2x - x^2\right]_1^2 \\ &= -1.\end{aligned}$$

Remarquons qu'on aurait pu aussi calculer cette intégrale en écrivant

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} - 1.$$

2. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Posons $x = \cos(t)$ de sorte que pour $t = 0$, $x = 1$ et pour $t = \pi$, $x = -1$. De plus, en dérivant, on trouve $dx = -\sin(t)dt$ et donc

$$\frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt &= \int_1^{-1} \frac{-1}{1+x^2}dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= [\arctan(x)]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu calculer cette intégrale en écrivant la fonction sous la forme $u'(t)/(1+u(t)^2)$, avec $u(t)=\cos(t)$.

3. La fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe C^1 sur $[1,e]$. Posons $x=\ln t$ de sorte que pour $t=1$, on a $x=0$ et pour $t=e$, on a $x=1$. En dérivant, on trouve $dx=\frac{dt}{t}$. On a donc

$$\frac{dt}{2t\ln(t)+t}=\frac{dt}{t}\times\frac{1}{2\ln(t)+1}=\frac{dx}{2x+1}.$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{2t\ln(t)+t}dt &= \int_0^1 \frac{1}{2x+1}dx\\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1\\ &= \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Avant de commencer, on pourra consulter la vidéo suivante, qui présente comment calculer une intégrale en effectuant un changement de variables.

1. La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs dans $[1,e]$. Posons $x=e^t$, de sorte que pour $t=0$ on a $x=1$ et pour $t=1$, on a $x=e$. En dérivant, on a de plus $dx=e^t dt$ et donc $dt=\frac{dx}{e^t}=\frac{dx}{x}$. Ainsi,

$$\frac{dt}{e^t+1}=\frac{1}{x(x+1)}.$$

Il vient

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}=\int_1^e \frac{dx}{x(1+x)}.$$

On calcule cette dernière intégrale en remarquant que $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} &= \int_1^e \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= [\ln(x)-\ln(x+1)]_1^e\\ &= 1+\ln(2)-\ln(e+1).\end{aligned}$$

2. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $[1,3]$ avec pour image $[1,\sqrt{3}]$. Posons $x=\sqrt{t}$ de sorte que, lorsque $t=1$, on a $x=1$ et lorsque $t=3$, on a $x=\sqrt{3}$. En dérivant, on trouve $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ de sorte que $dt=2xdx$. Ainsi,

$$\frac{\sqrt{t}}{t+1}dt=\frac{x}{x^2+1}\cdot 2xdx=2\frac{x^2}{x^2+1}dx.$$

On va calculer l'intégrale résultant du changement de variables en remarquant que

$$\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}.$$

Finalement, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}dt &= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}dx\\ &= 2\int_1^{\sqrt{3}} dx-2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\\ &= 2\left(\sqrt{3}-1-\arctan(\sqrt{3})+\arctan 1\right)\\ &= 2\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= 2\sqrt{3}-2-\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

3. La fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)$ est de classe C^1 sur $[-\pi/2;\pi/2]$, à valeurs dans $[-1,1]$. Si on pose $t = \sin\theta$, on a en dérivant $dt = \cos(\theta)d\theta$. De plus, pour $\theta = -\pi/2$, on a $t = -1$ et pour $\theta = \pi/2$, on a $t = 1$. On a donc

$$\sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos(\theta)d\theta = |\cos\theta|\cdot\cos(\theta)d\theta = \cos^2(\theta)$$

car $\cos(\theta) \geq 0$ puisque $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. La fonction $u \mapsto \sqrt{1+u}$ est de classe C^1 sur $[0,2]$, à valeurs dans $[0,\sqrt{3}]$. Posons $x = \sqrt{1+u}$. En dérivant, on trouve $dx = \frac{du}{2\sqrt{1+u}}$ ce qui donne

$$\frac{2u}{\sqrt{1+u}}du = 4(x^2-1)dx$$

en ayant remarqué que l'on a aussi $u = x^2 - 1$. De plus, si $u = 1$, alors $x = \sqrt{2}$ et si $u = 2$, alors $x = \sqrt{3}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}}du &= 4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(u^2-1)du \\ &= 4\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 4\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

2. On va effectuer le même changement de variables, en posant $u = \sqrt{1+t}$, de sorte que $du = \frac{dt}{2\sqrt{1+t}} = \frac{dt}{2u}$. Il vient donc

$$\frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}} = \frac{2u}{\sqrt{1+u}}du.$$

De plus, si $t = 0$, alors $u = 1$ et si $t = 3$, alors $u = 2$. On a donc

$$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}dt = \int_1^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}}du = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

La fonction $x \mapsto (a+b-x)$ est une bijection continue strictement décroissante de $[a,b]$ sur lui-même, envoyant a en b et b en a. Effectuant le changement de variables $u = a+b-x$, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du \\ &= \int_a^b (a+b-u)f(u)du \\ &= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx.\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat demandé. Pour l'application, posons $a=0$, $b=\pi$ et $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Alors $f(\pi-x)=f(x)$ et donc, d'après le résultat précédent, on a

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

On calcule cette intégrale en effectuant le changement de variables $u=\cos x$. En effet, la fonction $x\mapsto\cos x$ réalise une bijection de l'intervalle $[0,\pi]$ sur l'intervalle $[-1,1]$. De $du=-\sin x dx$, on déduit

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{1+u^2}\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2}\\ &= \frac{\pi}{2}\big(\arctan(1)-\arctan(-1)\big)\\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. La fonction $x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ est continue sur $]-1,+\infty[$, intervalle où l'on va chercher une primitive de cette fonction, que l'on écrit sous la forme $\int^t\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$. On va effectuer le changement de variables $u=\sqrt{1+x}$, de sorte que $du=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$ et $x=u^2-1$. On a donc

$$\begin{aligned} \int^t\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx &= 2\int^{\sqrt{1+t}}(u^2-1)du\\ &= 2\left[\frac{u^3}{3}-u\right]^{\sqrt{1+t}}\\ &= \frac{2(1+t)^{3/2}}{3}-2\sqrt{1+t}. \end{aligned}$$

Une primitive est donc $x\mapsto\dfrac{2(1+x)^{3/2}}{3}-2\sqrt{1+x}$.

2. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{e^x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Cherchons une primitive de cette fonction que l'on écrit sous la forme $\int^t\frac{1}{e^x+1}$. Pour cela, on va effectuer le changement de variables $u=e^x$, de sorte que $du=e^x dx=udx$. On obtient

$$\begin{aligned} \int^t\frac{1}{e^x+1}dx &= \int^{e^t}\frac{1}{u(u+1)}du\\ &= \int^{e^t}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\\ &= [\ln(u)-\ln(u+1)]^{e^t}\\ &= \ln(e^t)-\ln(e^t+1)\\ &= t-\ln(e^t+1). \end{aligned}$$

Une primitive est donc $x\mapsto x-\ln(e^x+1)$.

3. La fonction $x\mapsto\frac{1}{x+x(\ln x)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel nous allons travailler. Cherchons en une primitive sous la forme $\int^t\frac{1}{x+x(\ln x)^2}dx$. Pour cela, on va poser $u=\ln x$, de sorte que $du=\frac{dx}{x}$. On a donc

$$\begin{aligned} \int^t\frac{1}{x+x(\ln x)^2}dx &= \int^{\ln(t)}\frac{1}{1+u^2}du\\ &= [\arctan(u)]^{\ln t}\\ &= \arctan(\ln(t)). \end{aligned}$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+x(\ln x)^2}$ est donc la fonction $x \mapsto \arctan(\ln x)$. On aurait aussi pu remarquer que

$$\frac{1}{x+x(\ln x)^2} = \frac{1/x}{1+(\ln x)^2} = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

avec $u(x) = \ln(x)$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. La fonction $x \mapsto \cos(2\ln x)$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel on va chercher à calculer une primitive que l'on écrit $\int^t \cos(2\ln x)dx$. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \ln x$, de sorte que $du = \frac{dx}{x}$ ce qui donne $dx = xdu = e^u du$. Ainsi, on trouve

$$\int^t \cos(2\ln x)dx = \int^{\ln t} e^u \cos(2u)du.$$

On calcule cette dernière primitive par les méthodes usuelles :

$$\begin{aligned}
\int^t \cos(2\ln x)dx &= \int^{\ln t} \Re e\left(e^{(1+2i)u}\right)du \\
&= \Re e\left(\int^{\ln t} e^{(1+2i)u}du\right) \\
&= \Re e\left(\frac{e^{(1+2i)\ln x}}{1+2i}\right) \\
&= \frac{x}{5}\Re e\left(e^{2i\ln x}(1-2i)\right) \\
&= \frac{x}{5}\left(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln(x))\right).
\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive sous la forme $\int^t \cos(\sqrt{x})dx$. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ ou encore $dx = 2udu$. Lorsque $x = t$, on a $u = \sqrt{t}$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
\int^t \cos(\sqrt{x})dx &= 2\int^{\sqrt{t}} u\cos(u)du \\
&= 2[u\sin u]^{\sqrt{t}} - 2\int^{\sqrt{t}} \sin(u)du \\
&= 2\sqrt{t}\sin(\sqrt{t}) + 2\cos(\sqrt{t})
\end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties). Une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ est donc la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x})$.

3. La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$ est bien définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel on va chercher une primitive, sous la forme $\int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx$. Pour cela, on va poser $u = \sqrt{e^x-1}$, de sorte que

$$du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$$

et

$$3+e^x = u^2+4.$$

Par ailleurs, si $x = t$, alors $u = \sqrt{e^t-1}$. On a donc

$$\int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = 2\int^{\sqrt{e^t-1}} \frac{du}{u^2+4}.$$

Comme une primitive de $\frac{2}{u^2+4}$ est $\arctan(u/2)$, on en déduit que

$$\int^t \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right).$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. On met tout au même dénominateur :

$$a+\frac{b}{x+1} = \frac{ax+(a+b)}{x+1}.$$

Le choix de $a=1$ et $b=-1$ fonctionne.

2. On écrit

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx &= \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= [x-\ln(x+1)]_1^2 \\ &= 2-\ln(3)-1+\ln(2) \\ &= 1+\ln(2/3).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2+b(x-1)(x+3)+c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2(a+b)+x(6a+2b+c)+(9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.\end{aligned}$$

L'égalité demandée sera vérifiée dès que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 5 \\ 6a+2b+c &=& 21 \\ 9a-3b-c &=& 22 \end{array}\right.$$

On résout ce système en commençant par remarquer que $a=5-b$. Il est donc successivement équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 5-b \\ -4b+c &=& -9 \\ -12b-c &=& -23 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 5-b \\ c &=& -9+4b \\ -16b &=& -32 \end{array}\right.$$

On trouve finalement comme unique solution $a=3$, $b=2$ et $c=-1$, de sorte que

$$f(x) = \frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}.$$

2. On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$F(x) = 3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}+d.$$

La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation

$$3\ln(1)+2\ln 5+\frac{1}{5}+d=0.$$

La primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par

$$F(x)=3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}-2\ln 5-\frac{1}{5}.$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Le numérateur et le dénominateur ayant même degré, on va chercher à écrire la fraction rationnelle sous la forme

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve

$$f(x)=\frac{ax^2+x(-2a+b)+(a-b+c)}{(x-1)^2}.$$

Par identification, on trouve $a=2$, $b=1$ et $c=3$. Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ sont les fonctions

$$F(x)=2x+\ln(x-1)-\frac{3}{x-1}+d,$$

où d est une constante.

2. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}.$$

Par identification (par exemple...), on trouve que $a=2$ et $b=-3$. Une primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction est donc

$$x\mapsto 2\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}.$$

3. C'est facile, car la fraction rationnelle est sous la forme $\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u^2}$, avec $u(x)=(x^2-4)$. Une primitive est donc donnée par

$$x\mapsto\frac{-1}{2(x^2-4)}.$$

4. On essaie cette fois d'écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=a+\frac{b}{3x-1}+\frac{c}{2x+1}+\frac{d}{(2x+1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2\\ 8a+4b+6c & = & 18\\ -a+4b+c+3d & = & 10\\ -a+b-c-d & = & -9.\end{array}\right.$$

On résoud ce système et on trouve comme solution $a=2$, $b=-1$, $c=1$ et $d=5$. On intègre maintenant chacun des éléments simples et on trouve qu'une primitive de la fonction f est

$$x\mapsto 2x-\frac{1}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{5}{2(2x+1)}.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. On remarque simplement que $x^2+4=x^2+2^2$. Une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x^2+4}$ est donc $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. On écrit le dénominateur sous forme canonique, $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$. La méthode précédente donne

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\arctan(x+2).$$

3. Le dénominateur se factorise en $(1-x)(1+x)=-(x-1)(x+1)$. On sait donc qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}.$$

En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve

$$a=-1/2,\ b=1/2.$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ est donc $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|$.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\frac{3x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{2}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+x+1}.$$

On intègre alors. Pour la première partie, c'est facile, car :

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln|x^2+x+1|.$$

Pour la seconde, on se ramène à écrire le dénominateur sous la forme $X^2+\omega^2$, ce qui nécessite en plus un changement de variables. Ici, on a $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ soit, avec le changement de variables $u=x+1/2$,

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Finalement, une primitive de la fonction recherchée est

$$x\mapsto\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On procède exactement comme à la question précédente :

$$\frac{2x}{x^2-x+1}=\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc

$$x\mapsto\ln|x^2-x+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times\left(x-\frac{1}{2}\right)\right).$$

3. Ici, il n'y a rien à faire car le numérateur est déjà la dérivée du dénominateur ! Une primitive de la fonction recherchée est donc tout simplement

$$x\mapsto\ln|x^2+x-3|.$$

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On va intégrer par parties en posant $u(x)=x+6$, $v'(x)=e^{2x}$, de sorte que $u'(x)=1$ et $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+6)e^{2x}dx &= \left[\frac{(x+6)e^{2x}}{2}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx\\ &= 4e^4 - 3 - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^2\\ &= 4e^4 - 3 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}\\ &= \frac{15e^4-11}{4}.\end{aligned}$$

On peut aussi chercher une primitive de $x\mapsto(x+6)e^{2x}$ sous la forme $x\mapsto(ax+b)e^{2x}$, comme dans la correction de la question suivante.

2. On peut comme à la question précédente intégrer par parties (mais il faudrait répéter 3 fois l'intégration par parties), ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F : x\mapsto e^x(ax^3+bx^2+cx+d)$. On a alors

$$F'(x) = e^x\big(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)\big).$$

Par identification, on trouve que F est une primitive de $x\mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$ lorsque $a=2$, $3a+b=3$, $2b+c=-1$ et $c+d=1$, soit $a=2$, $b=-3$, $c=5$ et $d=-4$. Les primitives sont donc les fonctions

$$x\mapsto e^x(2x^3-3x^2+5x-4)+C.$$

L'intégrale recherchée vaut donc

$$F(1)-F(0)=4.$$

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On commence par remarquer que $\sin(2x)=\Im m(e^{2ix})$ et donc que $e^x\sin(2x)=\Im m\left(e^{(1+2i)x}\right)$. On peut sortir la partie imaginaire de l'intégrale et on trouve

$$\int_0^\pi e^x\sin(2x)dx = \Im m\left(\int_0^\pi e^{(1+2i)x}dx\right).$$

On commence par calculer cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{(1+2i)x}dx &= \left[\frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)x}\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{1+2i}\left(e^\pi e^{2i\pi}-1\right)\\ &= \frac{e^\pi-1}{1+2i}.\end{aligned}$$

On écrit ensuite ce nombre complexe sous forme algébrique pour en déterminer la partie imaginaire :

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i.$$

Finalement, on trouve que

$$\int_0^\pi e^x\sin(2x)dx = \frac{2(1-e^\pi)}{5}.$$

2. On commence par linéariser $\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$ et on trouve que l'intégrale vaut

$$I=\int_0^{2\pi} e^{-x}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{1-e^{-2\pi}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos(2x)dx.$$

On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)dx &= \Re e\left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x}dx\right)\\ &= \Re e\left(\left[\frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)x}\right]_0^{2\pi}\right)\\ &= \Re e\left(\frac{1}{5}(2i+1)(1-e^{-2\pi})\right)\\ &= \frac{1}{5}(1-e^{-2\pi}).\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$I=\frac{2}{5}(1-e^{-2\pi}).$$

Correction de l'exercice 26 ▲

Notons I l'intégrale. I est égale à $\Re e(J)$ avec $J=\int_0^\pi x^2e^{(1+i)x}dx$ (on a posé $\cos x=\Re e(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}J &= \left[\frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx\\ &= -\frac{\pi^2e^\pi}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx.\end{aligned}$$

On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx &= \left[\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi - \frac{1}{1+i}\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx\\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^\pi\\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i} + \frac{i}{2}(-1-e^\pi).\end{aligned}$$

Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :

$$J=-\pi^2e^\pi\frac{1-i}{2} - i\pi e^\pi - \frac{1+i}{2}(-1-e^\pi),$$

soit

$$I=\frac{1}{2}+\frac{1-\pi^2}{2}e^\pi.$$

Correction de l'exercice 27 ▲

1. On a

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\ &= \frac{1}{2^5i}\left(e^{5ix}-e^{-5ix}-5e^{3ix}+5e^{-3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}\right)\\ &= \frac{\sin(5x)}{16}-\frac{5\sin(3x)}{16}+\frac{5\sin(x)}{8}.\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-\cos(5x)}{80} + \frac{5\cos(3x)}{48} - \frac{5\cos(x)}{8}.$$

2. On écrit, pour éviter le calcul d'un produit, $\cos^4 x \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^6 x$. Or,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x}+e^{-i4x}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6\right) \\ &= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right).\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^6}\big(2\cos(6x)+12\cos(4x)+30\cos(2x)+20\big).$$

On a donc

$$\cos^4 x - \cos^6 x = -\frac{1}{32}\cos(6x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{32}\cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

Une primitive de la fonction étudiée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{x}{16}.$$

3. On commence par linéariser $\cos^3 x$ en $\big(\cos(3x)+3\cos(x)\big)/4$. Avec la formule

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q)+\cos(p-q)\big)$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\cos^3 x &= \frac{1}{8}\int \big(1+\cos(6x)+3\cos(4x)+3\cos(2x)\big)dx \\ &= \frac{x}{8}+\frac{\sin(6x)}{48}+\frac{3\sin(4x)}{32}+\frac{3\sin(2x)}{16}+C.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 28 ▲

1. On va procéder par récurrence sur n. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) = \text{"}\forall m > n,\ \int_0^\pi \cos^n(x)\cos(mx)dx = 0\text{"}.$$

Initialisation : La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, pour tout $m > 0$, on a

$$\int_0^\pi \cos(mx)dx = \left[\frac{1}{m}\sin(mx)\right]_0^\pi = 0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathscr{P}(n+1)$. Soit $m > n+1$. Alors, on écrit

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos(mx)dx = \int_0^\pi \cos^n x\cos(x)\cos(mx)dx$$

et on applique la formule rappelée par l'énoncé à $a = x$ et $b = mx$. Il vient

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos\big((m+1)x\big)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos\big((m-1)x\big)dx.$$

Mais comme $m > n+1$, on a $m+1 > n$ et $m-1 > n$ et donc les deux intégrales sont nulles d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est prouvée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. On va également procéder par récurrence. Notons, pour $n \geq 0$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) = \text{"} \int_0^\pi \cos^n(x)\cos(nx)dx = \frac{\pi}{2^n}\text{"}.$$

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet,

$$\int_0^\pi \cos^0(x)\cos(0x)dx = \int_0^\pi dx = \pi = \frac{\pi}{2^0}.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors on écrit

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos\big((n+1)x\big)dx = \int_0^\pi \cos^n(x)\cos(x)\cos\big((n+1)x\big)dx$$

et on applique la formule rappelée par l'énoncé à $a = x$ et $b = (n+1)x$. Il vient

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos\big((n+1)x\big)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos\big((n+2)x\big)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^n(x)\cos(nx)dx.$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence et le résultat de la première question (pour la première intégrale), on trouve bien que

$$\int_0^\pi \cos^{n+1}(x)\cos\big((n+1)x\big)dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est prouvée. Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Correction de l'exercice 29 ▲

Puisqu'on sait qu'une primitive de $\frac{1}{\cos^2 x}$ est $\tan x$, on est incité à utiliser le changement de variables $t = \tan x$. Utilisant

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ et } 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int (1+t^2)^2 dt \\
&= \int (1+2t^2+t^4)dt \\
&= t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \\
&= \tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 30 ▲

1. On pose $u = \cos t$, de sorte que $du = -\sin t dt$. Il vient $\sin^3 dt = (\sin^2 t)\sin t dt = -(1-u^2)du$. De plus, pour $t = 0$, $u = 1$ et pour $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$. L'intégrale est donc égale à

$$\begin{aligned}
I &= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1-u^2}{1+u^2}du \\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1-u^2}{1+u^2}du \\
&= -\int_{\sqrt{2}/2}^1 du + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{u^2+1}du \\
&= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan(\sqrt{2}/2).
\end{aligned}$$

2. Là aussi, le meilleur changement de variables est $u = \cos x$, de sorte que $du = -\sin x dx$. Pour le faire apparaitre dans l'intégrale, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx \\ &= \int_{1/2}^{0} \frac{-du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

3. C'est encore le même changement de variables qui est le meilleur !

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \big(1+\cos(x)\big)\tan(x) dx &= \int_{1/2}^{1} \frac{1+u}{u} du \\ &= \big[u + \ln u\big]_{1/2}^{1} \\ &= \frac{1}{2} + \ln 2.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31 ▲

1. On pose

$$w(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x + 2\sin^2 x} dx$$

et on remarque que $w(-x) = w(x)$. Ceci nous conduit, par les règles de Bioche, au changement de variables $t = \cos x$. Il vient $dt = -\sin x dx$ et donc, en changeant également l'ordre des bornes,

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t(\sqrt{2}t + 2 - 2t^2)}.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que

$$\frac{1}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)} = \frac{-1}{t(t-\sqrt{2})(2t+\sqrt{2})} = \frac{1}{2t} + \frac{-1}{6(t-\sqrt{2})} + \frac{-2}{3(2t+\sqrt{2})}.$$

On en déduit

$$I = \left[\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-t) - \frac{1}{3}\ln(2t+\sqrt{2})\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

(il faut prendre garde que $t - \sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :

$$I = -\frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{3}\ln(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}) + \frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\ln(2\sqrt{2}).$$

Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...

2. Aucune des règles de Bioche ne s'applique, et on est conduit à poser $u = \tan(x/2)$, de sorte que

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\times\frac{2du}{1+u^2}\\ &= \int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1}\\ &= \int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32 ▲

1. La fonction $x\mapsto\frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}$ est continue sur $]0,\pi]$, et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (on a $f(x)\sim_0 x/9$). On commence par effectuer le changement de variables $t=x/6$, de sorte que, notant I l'intégrale,

$$I=\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos(2t)}{\sin(3t)}6dt=12\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 t}{3\sin t-4\sin^3 t}dt,$$

soit encore, après simplification :

$$I=12\int_0^{\pi/6}\frac{\sin t}{4\cos^2 t-1}dt.$$

On effectue alors le changement de variables $u=\cos t$, de sorte que $du=-\sin t dt$, et

$$I=-12\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{du}{4u^2-1}=6\int_{\sqrt{3}}^2\frac{dv}{v^2-1}$$

où on a remis les bornes dans le bon sens, puis poser $v=2u$. Écrivant $\frac{2}{v^2-1}=\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}$, puis intégrant, on trouve

$$I=-3\left[\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right]_2^{\sqrt{3}}=3\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right).$$

2. La règle de Bioche nous dit que le changement de variables approprié est $u=\cos x$. Pour le faire apparaitre, on écrit

$$\frac{dx}{\sin x+\sin 2x}=\frac{dx}{\sin x(1+2\cos x)}=\frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)(1+2\cos x)}.$$

On obtient, notant J l'intégrale,

$$J = \int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$

On décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)}=\frac{1/6}{1-u}-\frac{1/2}{1+u}+\frac{4/3}{1+2u}.$$

On peut alors finir le calcul de J :

$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{1}{6}\ln|1-u|-\frac{1}{2}\ln|1+u|+\frac{2}{3}\ln|1+2u|\right]_0^{1/2}\\ &= \frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$